Teoretická část - 12.7.2021

1. (a) Definujte Cauchyův součin řad $(1,5$ bodu).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o součinu řad (4 body).

   (c) Pomocí věty o součinu řad ukažte, že pro funkci

   $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

   platí

   $$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

   Vše řádně zdůvodněte $(2,5$ bodu).

2. (a) Definujte Taylorův polynom funkcí více proměnnných a Hessovu matici $(2,5$ bodu).

   (b) Zformulujte větu o Peanově tvaru zbytku a větu o postačující podmínce pro extrém (2 body).

   (c) Větu o postačující podmínce pro extrém dokažte $(1,5$ bodu).

   (d) Pro funkci $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $a = (1,2,2)$ a $n = 1,2,3,4$ napište koeficient u $(x-1)^2(z-2)$ polynomu $T^n_{f,a}$ (1 bod).

   (e) Rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení:

      i. je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $H_f(-1,-3)$ je pozitivně definitní, potom existuje $\delta > 0$, že $H_f(x,y)$ je pozitivně definitní pro $(x,y) \in U((-1,-3),\delta)$

   (1 bod).

3. (a) Definujte hromadný bod, izolovaný bod a limitu zobrazení v metrickém prostoru (3 body).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o spojitosti metriky a normy (2 body).

   (c) Pro množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ uvažujme zobrazení $\rho : M \times M \to [0, \infty)$ definované jako

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } a = b, \\ 1, & \text{pokud } a \neq b, \end{cases}$$

   $a, b \in M$.

   i. Dokažte, že (M, ρ) je metrický prostor.

   ii. Dokažte, že množina

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x > 0\}$$

   je v tomto metrickém prostoru otevřená i uzavřená.

   iii. Popište množinu všech hromadných bodů množiny K (v metrickém prostoru (M, ρ))

   (2 body).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   i. je-li množina $\mathbb{R}$ vybavená obvyklou (eukleidovskou) metrikou a $U \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená, potom U nemá izolované body,

   ii. je-li (M, ρ) metrický prostor a $U \subset M$ je otevřená, potom U nemá izolované body (v (M, ρ)).

   Vše řádně zdůvodněte (1 bod).